

$$2.a) \frac{103}{103 \text{ pu}} u_{n+1} = (a_{n+1} - 120)$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,85 a_n + 18 - 120$$

et $a_n = u_n + 120$

$$\left| \begin{array}{l} u_n = a_n - 120 \\ \text{donc} \\ a_n = u_n + 120 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,85 (u_n + 120) + 18 - 120$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,85 u_n + \underline{102 + 18} - 120$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,85 u_n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $0,85$ et de 1^{er} terme

$$u_0 = a_0 - 120 = 50 - 120 = \underline{\underline{-70}}$$

b) Démontrez : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 120 - 70 \times 0,85^n$

(u_n) suite geom donc $u_n = u_0 \times q^n$

$$u_n = a_0 - 120 = \underline{\underline{-70}}$$

$$\underline{\underline{u_n = -70 \times 0,85^n}}$$

$$u_n = a_n - 120$$

$$\Leftrightarrow a_n = u_n + 120 = \underline{\underline{-70 \times 0,85^n + 120}}$$

c) Sens de variation de (a_n)

$$a_{n+1} = -70 \times 0,85^{n+1} + 120$$

$$a_{n+1} - a_n = -70 \times 0,85^{n+1} + 120 - (-70 \times 0,85^n + 120)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = -70 \times 0,85^{n+1} + \cancel{120} + 70 \times 0,85^n - \cancel{120}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = -70 \times 0,85^n \times 0,85^1 + 70 \times 0,85^n$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = 70 \times 0,85^n (-0,85 + 1) = 70 \times 0,85^n \times 0,15$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = \underline{\underline{10,5 \times 0,85^n}}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{10,5 \times 0,85^n}{70}$$

donc la suite (a_n) est strictement \nearrow .

d) si $n \geq 20$ alors $117 \leq a_n \leq 120$.

$$a_{20} \approx 120 - 70 \times 0,85^{20} = 117,9868388 \\ \approx \underline{\underline{117,987}}$$

et (a_n) est croissante, donc

si $n \geq 20$ alors $a_n > \underline{\underline{117,987}}$

De plus :

$$a_n = 120 - \frac{70 \times 0,85^n}{70} < 120$$

Donc conclusion: pour $n \geq 120$

$$\text{on a } \underline{\underline{117 \leq a_n \leq 120}}$$

2-a) g_n : nb d'heures de gymnastique à prévoir /semaine pr l'an 2006+n.

$$g_n = \frac{60}{100} a_n + 2 \times \frac{40}{100} a_n = \underline{\underline{14a_n}}$$

\uparrow
nb d'adhérents
60% des
adhérents
s'inscrivent pour
une heure de
gym.

40% des
adhérents
s'inscrivent pour 2h.

donc

$$\underline{\underline{g_n = 14 (120 - 70 \times 0,85^n)}}$$

b) Nb de séances / semaine est égal à :

$$\frac{\text{nb heures de gym}}{\text{gpe de 20 personnes max}} = \frac{g_n}{20}$$

$$\text{et } \frac{g_n}{20} = \frac{14 \text{ an}}{20} = \frac{1,4(120 - 70 \times 0,85^n)}{20}$$

L'association devrait prévoir + de 8 séances/semaine donc on voudrait $g_n > 8$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{20} (120 - 70 \times 0,85^n) > 8$$

$$\Leftrightarrow 1,4 (120 - 70 \times 0,85^n) > 8 \times 20$$

$$\Leftrightarrow 1,4 \times 120 - 1,4 \times 70 \times 0,85^n > 160$$

$$\Leftrightarrow 168 - 98 \times 0,85^n > 160$$

$$\Leftrightarrow 168 - 160 > 98 \times 0,85^n$$

$$\Leftrightarrow 8 > 98 \times 0,85^n$$

avec la calculatrice, menu TABL.

$$\text{fct } f(x) = 98 \times 0,85^x$$

$$\boxed{n=16} \quad f(x) = 7,2766$$

$$\underline{n=15} \quad f(x) = 8,5607.$$

C'est donc à partir de $2006 + 16 = 2022$ qu'il faudra prévoir plus de 8 séances par semaine.