Correction 1

a. Vrai ; d'après le tableau de variation, on a : $f(-2) = 3$.

b. Faux ; f est croissante sur $[-2\,;0]$, ainsi, on obtient l'encadrement suivant :

$$-2 < \quad -1 \quad < 0$$

La fonction f est croissante.

$$f(-2) < f(-1) < f(0)$$
$$3 < f(-1) < 7$$

Ainsi, on a : $f(-1) \in [3\,;7]$; $f(1) = -4$.

On en déduit : $f(1) < f(-1)$

c. Faux ; $f(1) = -4$

d. Faux ; sur l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x)$ décroit de 7 vers -4, $f(x)$ passe nécessairement par des valeurs strictement négative avant d'atteindre la valeur -4.

e. Vrai ; on voit que la fonction décroit deux fois, pour atteindre une fois 3 et la seconde fois -4 : la valeur minimale atteinte est -4.

Correction 2

1. **Faux** : car d'après le tableau de signe, on voit que tous les nombres de l'intervalle $]-3\,;5[$ ont une image négative.

2. **Vrai** : le tableau de signe nous indique que la fonction f s'annule pour les valeurs -3 et 5.

3. **Faux** : une fonction affine, non constante, étant strictement décroissante ou strictement croissante, elle ne s'annule qu'une seule fois.

4. **Vrai** : le tableau de signe indique que la fonction est strictement négative seulement sur l'intervalle $]-3\,;5[$.

5. **Faux** : d'après le tableau de signe, l'image de 0 est un nombre négatif ; par contre, le point $(5\,;0)$ est un point de $\mathscr{C}_f$.

6. **On ne peut pas savoir** : le minimum de la fonction f est atteint sur l'intervalle $]-3\,;5[$ mais non-nécessairement atteint pour la valeur 1

Correction 3

- La droite (d_1) a pour équation : $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$

  Elle passe par les points $(0\,;2)$ et $(2\,;1)$ ce qui implique qu'elle possède une ordonnée à l'origine égal à 2.

  De plus, elle possède $\overrightarrow{u}\,(2\,;-1)$ comme vecteur directeur : on en déduit que la droite (d_1) a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$.

- La droite (d_2) a pour équation : $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$.

  Elle passe par les points $(-1\,;1)$ et $(2\,;2)$.

  Elle possède $\overrightarrow{u}\,(3\,;1)$ comme vecteur directeur : son coefficient directeur est $\dfrac{1}{3}$.

  Puisque la droite (d_2) passe par le point de coordonnées $(2\,;2)$, on doit avoir :

$$f(2) = 2$$
$$\frac{1}{3}\times 2 + b = 2$$
$$\frac{2}{3} + b = 2$$
$$b = 2 - \frac{2}{3}$$
$$b = \frac{4}{3}$$

- La droite (d_3) a pour équation : $y = x + 3$.

  La droite passe par les points $(0\,;3)$ et $(1\,;4)$.

  On en déduit que son ordonnée à l'origine vaut 3 et qu'elle a pour vecteur directeur $(1\,;1)$: son coefficent directeur vaut 1.

Correction 4

1. On ne demandait qu'une lecture graphique des équations cartésiennes des droites (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4). Mais voici la détermination algébrique de leurs équations :

   - La droite (d_1) passe par les points :
     $A(-4\,;-1)$; $B\,(-2\,;0)$
     Le coefficient directeur de cette droite est :
     $a = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{-1-0}{-4-(-2)} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$
     L'équation de sa droite admet une expression de la forme :
     $y = \dfrac{1}{2}x + b$.
     Le point A appartient à la droite (d_1). En utilisant les coordonnées de ce point, on obtient l'équation :
     $-1 = \dfrac{1}{2}\times(-4) + b$
     $b = 1$
     On obtient l'équation cartésienne de la droite (d_1) :
     $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

   - La droite (d_2) passe par les points de coordonnées :
     $(1\,;4)$; $(-1\,;0)$.
     Une droite non-verticale est la représentation d'une fonction affine. Elle admet une équation cartésienne de la forme :
     $y = a\cdot x + b$.
     En utilisant le fait que la droite (d_2) passe par les deux points dont les coordonnées ont été précisées précédemment, on a :
     $\begin{cases} 4 = \ \ 1\cdot a + b \\ 0 = -1\cdot x + b \end{cases}$
     Par combinaison linéaire et en ajoutant ces deux lignes, on obtient :
     $4 = 2b$; $b = 2$
     En utilisant la première ligne, on obtient :
     $4 = 1{\cdot}a + b$
     $4 = a + 2$
     $a = 2$
     On a l'expression complète de l'équation cartésienne de la droite (d_2) :
     $y = 2x + 2$

   - La droite (d_3) passe par les points de coordonnées :
     $(0\,;2)$; $(2\,;-2)$.
     Le premier point permet d'obtenir l'ordonnée à l'origine de l'équation cartésienne de (d_3) :
     $b = 2$.
     Elle admet pour coefficient directeur :
     $a = \dfrac{0-2}{2-(-2)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

La droite (d_3) a pour équation cartésienne :
$y = -2x + 2$

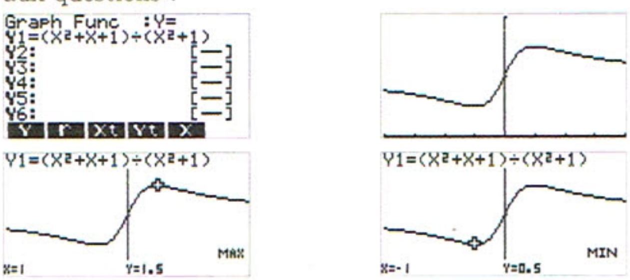
- La droite (d_4) est horizontale *(parallèle à l'axe des abscisses)* : elle est constante et passe par le point $(-3\,;2)$.
L'équation cartésienne de la droite (d_4) est :
$y = 2$

2. a. La droite (d_5) passe par les points de coordonnées :
$(-2\,;-3)\quad;\quad(5\,;3)$
Le coefficient directeur de la droite (d_5) est donné par :
$$a = \frac{-3-3}{-2-5} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$$

b. En utilisant le fait que la droite (d_5) passe par le point de coordonnées $(-2\,;-3)$, on a :
$$y = \frac{6}{7}\cdot x + b$$
$$-3 = \frac{6}{7}\times(-2) + b$$
$$-3 = -\frac{12}{7} + b$$
$$-3 + \frac{12}{7} = b$$
$$b = \frac{-21+12}{7}$$
$$b = -\frac{9}{7}$$
L'équation cartésienne de la droite (d_5) est :
$$y = \frac{6}{7}\cdot x - \frac{9}{7}$$

Correction 5

1. a. Voici les captures d'écran permettant de répondre aux questions :



b. On a le tableau de variation suivant :

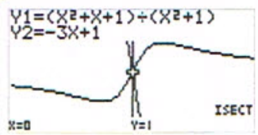
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Variation de f	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1

2. a. Résolvons l'équation :
$$f(x) = -3x + 1$$
$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} = -3x + 1$$
$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} + 3x - 1 = 0$$
$$\frac{x^2+x+1-(-3x+1)(x^2+1)}{x^2+1} = 0$$
$$\frac{x^2+x+1-(-3x^3-3x+x^2+1)}{x^2+1} = 0$$
$$\frac{x^2+x+1+3x^3+3x-x^2-1}{x^2+1} = 0$$
$$\frac{3x^3+4x}{x^2+1} = 0$$
$$\frac{x(3x^2+4)}{x^2+1} = 0$$
Si un quotient est nul alors son numérateur est nul.
$x(3x^2+4) = 0$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

$x = 0$	$3x^2 + 4 = 0$ $3x^2 = -4$ $x^2 = -\frac{4}{3}$ N'admet pas de solution

L'ensemble des solutions est :
$\mathcal{S} = \{0\}$

b. La calculatrice permet d'obtenir le même résultat :



Correction 6

1. L'expression de la fonction f est définie par un quotient ; or, un quotient ne peut pas voir son dénominateur s'annuler. Ainsi, la valeur annulant le dénominateur ne peut appartenir à l'ensemble de définition de la fonction f :
$$4x + 2 = 0$$
$$4x = -2$$
$$x = \frac{-2}{4}$$
$$x = -\frac{1}{2}$$
On en déduit l'ensemble de définition de la fonction f :
$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

2. a. A l'aide de la calculatrice, on peut imaginer le tableau de variation suivant :

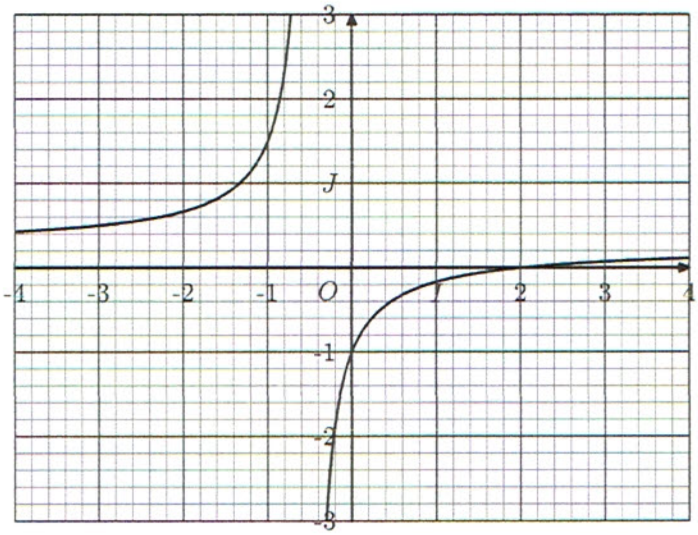
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variation de f	$\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{4}$

b. On a :

x	-4	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}8$
$f(x)$	0,4	0,5	0,7	0,9	1,5	2,3

x	$-0{,}3$	0	0,5	1	2	3	4
$f(x)$	-2.9	-1	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0	0,1	0,1

3. Voici la représentation de cette courbe :



Correction 7

1. a. La parabole $\mathscr{C}_f$ admet pour sommet le point de coordonnées :

$$S\left(-\frac{b}{2a}\,;\,-\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{1}{2\times 1}\,;\,-\frac{1^2-4\times 1\times(-2)}{4\times 1}\right) = \left(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1+8}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{9}{4}\right)$$

Le coefficient du second degré de ce polynôme étant strictement positif, la fonction f admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

b. La parabole $\mathscr{C}_g$ admet pour sommet le point de coordonnées :

$$S\left(-\frac{b}{2a}\,;\,-\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{4}{2\times(-2)}\,;\,-\frac{4^2-4\times(-2)\times(-3)}{4\times(-2)}\right) = \left(-\frac{4}{-4}\,;\,-\frac{16-24}{-8}\right) = \left(1\,;\,-\frac{-8}{-8}\right) = (1\,;\,-1)$$

Le coefficient du second degré de ce polynôme étant strictement négatif, la fonction g admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variation de g	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

c. La parabole $\mathscr{C}_h$ admet pour sommet le point de coordonnées :

$$S\left(-\frac{b}{2a}\,;\,-\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{1}{2\times(-4)}\,;\,-\frac{1^2-4\times(-4)\times 2}{4\times(-4)}\right) = \left(-\frac{1}{-8}\,;\,-\frac{1+32}{-16}\right) = \left(\frac{1}{8}\,;\,\frac{33}{16}\right)$$

Le coefficient du second degré de ce polynôme étant strictement négatif, la fonction h admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{8}$		$+\infty$
Variation de g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{33}{16}$	$\searrow$	$-\infty$

d. La parabole $\mathscr{C}_j$ admet pour sommet le point de coordonnées :

$$S\left(-\frac{b}{2a}\,;\,-\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{2}{2\times 2}\,;\,-\frac{2^2-4\times 2\times 2}{4\times 2}\right) = \left(-\frac{2}{4}\,;\,-\frac{4-16}{8}\right) = \left(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{-12}{8}\right) = \left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$$

Le coefficient du second degré de ce polynôme étant strictement positif, la fonction f admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variation de j	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. On observe facilement :

- La fonction f admet deux zéros.
- La fonction g n'admet aucun zéros.
- La fonction h admet deux zéros.
- La fonction j n'admet aucun zéros.