Correction 8

1. a. Le coefficient du terme de degré 2 de la fonction f est positif.

La fonction f admet un minimum atteint en :

$-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{2}$ et vaut :

Ce minimum a donc pour valeur :

$$f\Big(-\frac{1}{2}\Big)=\Big(\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{4}{4}=\frac{7}{4}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	$\frac{7}{4}$	↗ $+\infty$

b. Le coefficient du terme de second degré de la fonction g est négatif.

Sa parabole admet pour sommet le point de coordonnées :

$$\Big(-\frac{b}{2a}\,;\,-\frac{\Delta}{4a}\Big)$$

On a les deux valeurs :

- $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-3}{2\times(-2)}=-\dfrac{3}{4}$
- $-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{49}{-8}=\dfrac{49}{8}$

Voici le tableau de variation de la fonction g :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	$\frac{49}{8}$	↘ $-\infty$

2. a. Cherchons les racines du polynome définissant la fonction f. Son discriminant a pour valeur :

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times=-3<0$

Le discrimiant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine. Son coefficient du terme de degré 2 étant positif, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

b. Déterminons les racines du polynome $-2x^2-3x+5$. On a le discriminant :

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times(-2)\times5=49>0$

On a la simplification suivante du discriminant :

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$

Le discrimant de ce polynome est positif : la fonction g admet deux racines :

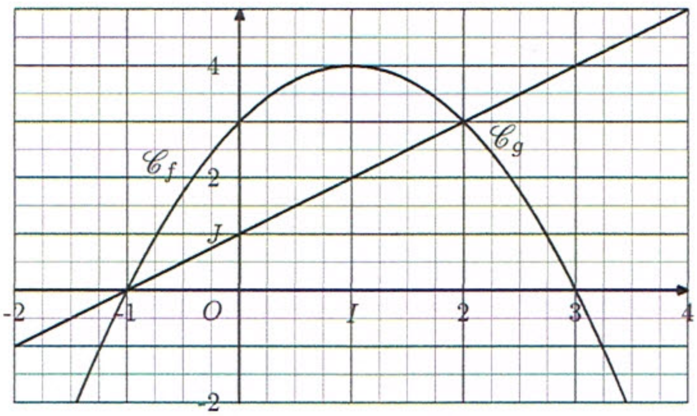
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-7}{-4}=1 \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+7}{-4}=-\frac{5}{2}$$

Le coefficient du terme de second degré étant strictement positif; on en déduit que la fonction g est positive pour des valeurs de x comprises entre les deux racines :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

Correction 9

1. Voici la représentation de la fonction g :



2. Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Les deux courbes s'interceptent aux deux points de coordonnées $(-1\,;0)$ et $(2\,;3)$; on en déduit l'ensemble des solutions de cette é'quation :

$\mathcal{S}=\{-1\,;\,2\}$

3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)\geqslant g(x)$ revient à chercher les valeurs de x où la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la fonction $\mathscr{C}_g$.

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $[-1\,;2]$

Correction 10

1. L'inégalité :

$\sqrt{x}>4$

est équivalente à :

$\sqrt{x}>\sqrt{16}$

La fonction racine carrée étant strictement croissante, on en déduit que deux nombres et leurs images sont ordonnées dans le même sens :

$\mathcal{S}=\,]16\,;\,+\infty[$

2. L'inégalité suivante :

$\sqrt{x}<9$

qui est équivalente à :

$\sqrt{x}<\sqrt{81}$

La fonction racine carrée est strictement positive, on en déduit :

$x<81$

En utilisant l'ensemble de définition de la fonction racine carrée, on en déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$\mathcal{S}=[0\,;\,81[$.

Correction 11

1. L'inéquation :

$x^3>8$

qui est équivalent à :

$x^3>2^3$

La fonction cube étant strictement croissante, deux nombres et leurs images sont comparés dans le même sens. On en déduit :

$x > 2$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$\mathcal{S} =]2\,;+\infty[$

2. L'inéquation :

$x^3 \leqslant 27$

qui est équivalent à :

$x^3 \leqslant 3^3$

La fonction cube étant strictement croissante, on en déduit :

$x \leqslant 3$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$\mathcal{S} =]-\infty\,;3]$

Correction 12

1. Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Graphiquement, on obtient que l'ensemble des solutions est :

$\mathcal{S}=\{-4\,;-3\,;1\}$

2. a. La courbe $\mathscr{C}_g$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur les intervalles :

$]-\infty\,;-4] \quad ; \quad [-3\,;1]$

b. La courbe $\mathscr{C}_g$ est au dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur les intervalles :

$]-4\,;-3] \quad ; \quad [1\,;+\infty[$

Correction 13

1. a. Résolvons l'équation :

$$-x+3=(x-1)^2$$
$$-x+3=x^2-2x+1$$
$$x^2-2x+1+x-3=0$$
$$x^2-x-2=0$$

Le polynôme x^2-x-2 du second degré a pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c$$
$$=(-1)^2-4\times1\times(-2)$$
$$=1+8$$
$$=9$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynome admet les deux racines suivantes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$	$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$
$=\dfrac{-(-1)-3}{2\times1}$	$=\dfrac{-(-1)+3}{2\times1}$
$=\dfrac{-2}{2}$	$=\dfrac{4}{2}$
$=-1$	$=2$

Cette équation a pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S}=\{-1\,;2\}$

b. Testons si -1 est solution de cette équation :

- $f(-1)=\sqrt{-x+3}=\sqrt{-(-1)+3}=\sqrt{4}=2$
- $g(-1)=-1-1=-2$

-1 n'est pas solution de l'équation $f(x)=g(x)$

Testons la valeur 2 :

- $f(2)=\sqrt{-2+3}=\sqrt{1}=1$
- $g(2)=2-1=1$

Le nombre 2 est une solution de l'équation $f(x)=g(x)$.

2. a. Soient a et b deux nombres de $]-\infty\,;3]$ tels que :

$a<b$

On a les inégalité suivantes :

$$-a>-b$$
$$-a+3>-b+3$$

La fonction racine carrée est croissante :

$$\sqrt{-a+3}>\sqrt{-b+3}$$
$$f(a)>f(b)$$

Deux nombres et leurs images sont comparés dans le sens inverse : on en déduit que la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;3]$.

b. La fonction g est une fonction affine dont le coefficient directeur a pour valeur 1 : la fonction g est croissante sur $]-\infty\,;3]$.

3. La question 1. permet d'affirmer que l'équation $f(x)=g(x)$ admet une unique solution : $x=2$.

La fonction f étant décroissante et la fonction g étant croissante, on en déduit :

- La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$.
- La courbe $\mathscr{C}_g$ est au dessous de la fonction g sur l'intervalle $[2\,;3]$.

Correction 14

1. a. L'équation :

$$f(x)=0$$

est équivalente à :

$$-x^2-\frac{7}{2}x+2=0$$

Ainsi, les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont les racines du polynôme $-x^2-\dfrac{7}{2}x+2$.

Ce polynome a pour discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=\left(-\frac{7}{2}\right)^2-4\times(-1)\times2$$
$$=\frac{49}{4}+8$$
$$=\frac{81}{4}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{814}=\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{4}}=\dfrac{9}{2}$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(-\frac{7}{2}\right)-\frac{9}{2}}{2\times(-1)} = \frac{\frac{7}{2}-\frac{9}{2}}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(-\frac{7}{2}\right)+\frac{9}{2}}{2\times(-1)} = \frac{\frac{7}{2}+\frac{9}{2}}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

Ainsi, l'équation $f(x)=0$ admet pour ensemble des solutions :

$\mathcal{S}=\left\{-4\,;\frac{1}{2}\right\}$

b. Les deux nombres -4 et $\frac{1}{2}$ vérifient l'égalité $f(x)=0$, ainsi les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses ont pour coordonnées :

$(-4\,;0)$; $\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$

2. a. L'équation :

$$f(x)=g(x)$$

est équivalente aux équations suivantes :

$$-x^2-\frac{7}{2}x+2=\frac{1}{2}x+1$$
$$-x^2-\frac{7}{2}x+2-\frac{1}{2}x-1=0$$
$$-x^2-\frac{8}{2}x+1=0$$
$$-x^2-4x+1=0$$

Le polynome du membre de gauche a pour discriminant :

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times(-1)\times1=16+4=20$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynome a les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)-2\sqrt{5}}{2\times(-1)}=\frac{4-2\sqrt{5}}{-2}=\frac{2(-2+\sqrt{5})}{2}=-2+\sqrt{5}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)+2\sqrt{5}}{2\times(-1)}=\frac{4+2\sqrt{5}}{-2}=\frac{2(-2-\sqrt{5})}{2}=-2-\sqrt{5}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$\mathcal{S}=\left\{-2-\sqrt{5}\;;\;-2+\sqrt{5}\right\}$

b. La résolution précédente de l'équation nous permet d'obtenir l'égalité suivante :

$f(x)-g(x)=-x^2-4x+1$

Le coefficient du second degré étant strictement négatif, ce polynome admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		$-2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$-x^2-4x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Correction 15

1. On a les deux valeurs :

- $f(2)=2\times2^3-10\times2^2+6\times2+12$
  $=2\times8-10\times4+12+12$
  $=16-40+12+12$
  $=0$
- $g(2)=2\times2-4$
  $=4-4$
  $=0$

2. a. On a les formes développées et réduites suivantes :

- $f(x)-g(x)=\big(2x^3-10x^2+6x+12\big)-\big(2x-4\big)$
  $=2x^3-10x^2+6x+12-2x+4$
  $=2x^3-10x^2+4x+16$
- $(x-2)\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big)$
  $=a{\cdot}x^3+b{\cdot}x^2+c{\cdot}x-2a{\cdot}x^2-2b{\cdot}x-2c$
  $=a{\cdot}x^3+\big(b-2a\big){\cdot}x^2+\big(c-2b\big){\cdot}x-2c$

En identifiant les coefficients de ces deux formes développées et réduites, on obtient le système :

$$\begin{cases} a & 2 \\ b-2a & -10 \\ c-2b & 4 \\ -2c & 16 \end{cases}$$

On en déduit les valeurs suivantes :

$a=2$ $\qquad b=-6$ $\qquad c=-8$

On en déduit l'égalité :

$f(x)-g(x)=\big(x-2\big)\big(2x^2-6x-8\big)$

b. Cherchons à factoriser le second facteur obtenu dans l'expression à la question b..

Le polynôme $2x^2-6x-8$ du second degré admet pour discriminant :

$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c$
$=(-6)^2-4\times2\times(-8)$
$=36+64$
$=100$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{100}=10$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-6)-10}{2\times2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-6)+10}{2\times2}=\frac{16}{4}=4$$

Ce polynôme admet la factorisation suivante :

$2x^2-6x-8=2(x+1)(x-4)$

Ainsi, on obtient la factorisation suivante :

$f(x)-g(x)=\big(x-2\big)\big(2x^2-6x-8\big)$
$=(x-2)\big[2(x+1)(x-4)\big]$
$=2(x-2)(x+1)(x-4)$

3. a. On a le tableau de signe suivante :

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b. On en déduit la position relative des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$:

- La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur :
  $[-1\,;2]$; $[4\,;+\infty[$
- La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur :
  $]-\infty\,;-1]$; $[2\,;4]$