Math93.com

Baccalauréat 2017 - ES/L Antilles Guyane

Série ES/L Obli. et Spé.
16 Juin 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. — 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Question 1 (Réponse c)

A et B sont deux évènements d'une expérience aléatoire.On note B l'évènement contraire de B. On sait que : $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,42$. On peut affirmer que :

a. $p_A(B) = 0,3$ **b.** $p(A \cup B) = 0,58$ **c.** $\boxed{p_B(A) = 0,84}$ **d.** $p\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,28$

Preuve.

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,42}{0,5} = 0,84$$

Question 2 (Réponse b)

Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;5]$.

a. L'espérance de X est $\frac{2}{5}$ **b.** $\boxed{p(X > 2) = \frac{3}{5}}$ **c.** $p(X \leq 2) = \frac{3}{5}$ **d.** $p(X \leq 5) = 0$

Preuve.

Propriété 1

Soit X la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$. Pour tout c et d de l'intervalle $[a\,;b]$ avec $c < d$ on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a} \quad \text{et} \quad E(X) = \frac{b+a}{2}$$

Donc ici puisque X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;5]$ on a :

$$p(X > 2) = p(2 < X \leq 5) = \frac{5-2}{5-0} = \frac{3}{5}$$

Question 3 (Réponse c)

Une machine remplit des flacons dont le volume annoncé est de 100 mL. On admet que le volume contenu dans le flacon peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 100mL et d'écart type 2mL.

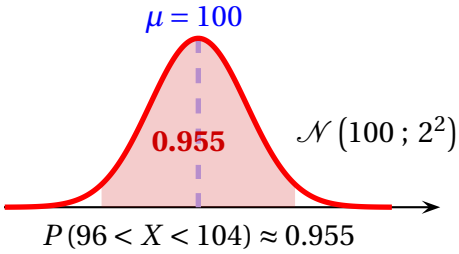
a. $p(Y \leq 100) = 0,45$ **b.** $p(Y > 98) = 0,75$ **c.** $\boxed{p(96 \leq Y \leq 104) \approx 0,95}$ **d.** $p(Y \leq 110) \approx 0,85$

Preuve

- Méthode 1.

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 2$. La calculatrice nous donne à 10^{-3} près :

$$X \sim \mathcal{N}\left(100\,;\,2^2\right) \Longrightarrow P(96 < X < 104) \approx \underline{0,955}$$



Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*(96 , 104 , 100 , 2) $\approx$ 0,954 50
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*(96 , 104 , 100 , 2) *ou (fr.) normalfrép*(96 , 104 , 100 , 2)
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*(96 , 104, 2 , 100)

- Méthode 2 : on pouvait aussi appliquer le théorème dit « $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$ » puisque

$$p(96 \leq Y \leq 104) = p(100 - 2\sigma \leq Y \leq 100 + 2\sigma) \approx 0,954$$

Propriété 2 (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\right) \approx 0,683 \quad : (1)$$
$$P\left(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\right) \approx 0,954 \quad : (2)$$
$$P\left(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\right) \approx 0,997 \quad : (3)$$

Question 4 (Réponse d)

Un article affirme, qu'en France, il y a 16% de gauchers. Un chercheur souhaite vérifier cette affirmation. Pour cela, il veut déterminer la taille de l'échantillon de la population française à étudier qui permettrait d'obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,1 au niveau de confiance de 0,95. La taille de l'échantillon est :

a. 30 **b.** 64 **c.** 100 **d.** $\boxed{400}$

Preuve.
Si f représente la fréquence du caractère étudié dans un échantillon de taille n, alors si les condition sont vérifiées , l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %, est donné par :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Donc son amplitude est : $A = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$. On cherche donc un entier n strictement positif tel que $\dfrac{2}{\sqrt{n} =} \leq 0,01$. En composant par la fonction inverse strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on obtient :

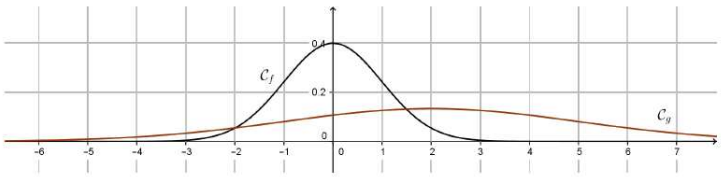
$$\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,01 \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{1}{0,1} \Longleftrightarrow \sqrt{n} = \frac{2}{0,1} = 20$$

Et puisque n est positif, on obtient en composant par la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+^*$: $\underline{n = 400}$.

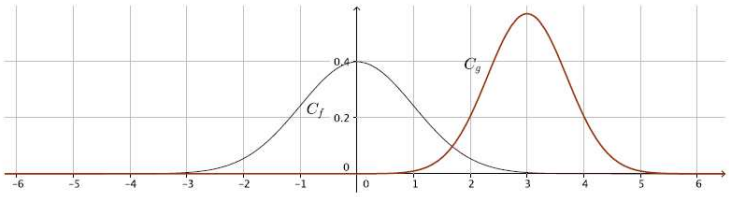
Question 5 (Réponse d)

La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite $N(0\,;\,1)$. La fonction g est la fonction de densité de probabilité associée à la loi normale de moyenne $\mu = 3$ et d'écart type $\sigma = 2$. La représentation graphique de ces deux fonctions est :

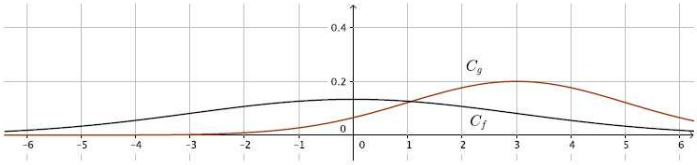
a.



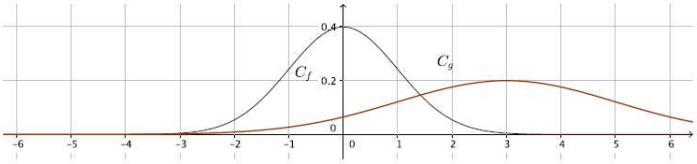
b.



c.



d.



Preuve.

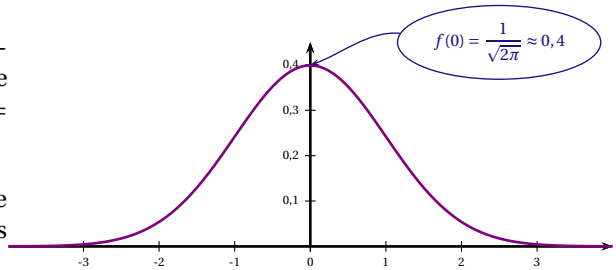
- $\mu = 3$ donc l'axe de symétrie de la courbe ${}_C c_g$ doit être la droite d'équation $x = 3$. On exclut la figure a.
- Puisque $\sigma = 2$ on a toujours avec le théorème 2 ou avec la calculatrice :

$$p\left(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\right) = p\left(1 < X < 5\right) \approx 0,68$$

  Cela exclut la figure b car visiblement l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_g$ entre 1 et 5 est supérieure à 4 carreaux soit 0,8.
- Les deux dernières courbes $\mathscr{C}_g$ sont identiques, il faut considérer $\mathscr{C}_f$. Par définition :

Définition 1

Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathscr{N}(0;1)$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
Pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, la courbe représentative de la densité f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



On doit donc avoir $f(0) \approx 0,4$ ce qui exclut la courbe $\mathscr{C}_f$ de la figure c.

- Conclusion : le figure correcte est la d.

Exercice 3. 7 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4\,;10]$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses. Le domaine S grisé sur la figure est le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 2$ et la droite d'équation $x = 4$.

Partie A

1. **Déterminer, en la justifiant, la valeur de $f'(-2)$.**
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses donc le nombre dérivée $f'(-2)$, coefficient directeur de cette tangente, est nul.

2. **Par une lecture graphique, quel semble être le signe de $f'(4)$?**
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4 est "dirigée vers le bas" donc le nombre dérivée $f'(4)$, coefficient directeur de cette tangente, est négatif.

3. **Déterminer, par une lecture graphique, un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire du domaine S grisé sur la figure.**
   L'aire du domaine S est comprise entre 3 et 4 unités d'aires.

Partie B

La fonction f précédente est définie sur l'intervalle $[-4\,;10]$ par $f(x) = (x+4)\ e^{-0,5x}$.

1.

1. a. Montrer que $f'(x) = (-0,5x-1)\ \mathrm{e}^{-0,5x}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [-4\,;10] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = (x+4) \times \mathrm{e}^{-0,5x} \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $[-4\,;10]$.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [-4\,;10]\ ;\ f(x) = u(x) \times v(x)\ :\ \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = (x+4) & ; & u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-0,5x} & ; & v'(x) = \left(-0,5\ \mathrm{e}^{-0,5x}\right) \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-4\,;10],\ \ & f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ & f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-0,5x} + (x+4) \times \left(-0,5\ \mathrm{e}^{-0,5x}\right) \\ & f'(x) = (1 - 0,5x - 2) \times \mathrm{e}^{-0,5x} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [-4\,;10]\ ;\ f'(x) = (-0,5x-1)\ \mathrm{e}^{-0,5x}}$$

1. b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;10]$.
La fonction dérivée f' s'exprime comme produit de deux facteurs. Le facteur $\mathrm{e}^{-0,5x}$ est strictement positif sur $[-4\,;10]$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. de ce fait, f' est du signe du facteur $(-0,5x-1)$ dont l'étude du signe est aisé.

$$\left\{ \begin{array}{l} -0,5x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -2 \\ -0,5x - 1 < 0 \Longleftrightarrow x > -2 \end{array} \right.$$

x	-4		α		2		10
Signe de $f'(x)$			$+$		0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$20\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$60\,\mathrm{e}^{-3}$

1. c. Montrer que sur l'intervalle [1 ; 6] l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution. On notera α cette unique solution.

1. d. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.

2. On admet que la dérivée seconde de f est définie par $f''(x) = 0,25x\ \mathrm{e}^{-0,5x}$.

2. a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-4; 10]$.

La suite de la correction est en cours de réalisation

©ISSN 2272-5318