DS Maths TES1 20/03/2018
sujet 2

Eléments de correction.

Ex1

1. $F(x) = \frac{x^{10}}{10} + 4 \times \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + \sqrt{2} \times x$ /1

$F(x) = \frac{x^{10}}{10} + x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{x} + x\sqrt{2}$

2. $g(t) = 24t\ln(t)$

(a) $G(t) = 12t\ln(t) - 6t^2$ $\quad G'(t) = 12 \times \ln(t) + 12t \times \frac{1}{t} - 12t$

$G'(t) = 12\ln(t) + 12 - 12t$

$G'(t) \neq g(t)$

(b) $G(t) = 24t\ln(t) - 6t^2$

$G'(t) = 24 \times \ln(t) + 24t \times \frac{1}{t} - 12t = 24\ln(t) + 24 - 12t \neq g(t)$ /1,5

(c) $G(t) = 12t^2\ln(t) - 6t^2$

$G'(t) = 24t \times \ln(t) + 12t^2 \times \frac{1}{t} - 12t = 24t\ln(t) + 12t - 12t$

$G'(t) = 24t\ln(t) = g(t)$ donc G est une primitive de g.

(d) $G(t) = 12t\ln t + 6t$ $\quad (12t\ln t)' = 12\ln(t) + 12$ (produit) donc $G'(t) = 12\ln t + 12 + 6 = 12\ln t + 18 \neq g(t)$

3. $f(x) = x e^{-x} + 1$

$F(x) = e^{-x}(-1 - x) + x$??

$F'(x) = ??$ $\quad u(x) = e^{-x}$ $\quad u'(x) = -e^{-x}$

$v(x) = (-1 - x)$ $\quad v'(x) = -1$

$F'(x) = -e^{-x} \times (-1 - x) + e^{-x} \times (-1) + 1$ /1,5

$F'(x) = e^{-x} \times (-1) \times (-1 - x) + e^{-x} \times (-1) + 1$

$F'(x) = e^{-x}(-1 \times (-1 - x) + (-1)) + 1$

$F'(x) = e^{-x}(1 + x - 1) + 1$

$F'(x) = e^{-x} \times (x) + 1 = x e^{-x} + 1 = f(x)$

donc F est une primitive de f.

Ex 2. / 8 points.

Vente de 1 000 à 30 000 pièces.

$B(x) = -0,5x^2 + 6x - 20 + 2x\ln x$ bénéfice en milliers d'euros.

x milliers de pièces, $x \in [1;30]$.

1. $B'(x) = -x + 8 + 2\ln x$?

Dérivons $2x\ln x$: $u(x) = 2x$ $u'(x) = 2$

$v(x) = \ln x$ $v'(x) = \frac{1}{x}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(2x\ln x)' = 2 \times \ln x + 2x \times \frac{1}{x} = 2\ln x + 2$

/1,5 $B'(x) = -0,5 \times 2x + 6 + (2\ln x + 2)$

$B'(x) = -x + 6 + 2\ln x + 2$

$\underline{B'(x) = -x + 8 + 2\ln x}$ CQFD!

3. a.

. sur $[1;2]$ B' est continue et strictement croissante.

. $B'(1) = 7$

/1,5 $B'(2) = 6 + 2\ln 2 \simeq 7,4$ } 0 n'est pas compris entre $B(1)$ et $B(2)$ donc il n'y a pas de solution sur $[1;2]$ telle que $B(x) = 0$. /0,5

. sur $[2;30]$ B' est continue et strictement décroissante.

$B'(2) \simeq 7,4$

$B'(30) = -22 + 2\ln 30 \simeq -15,2$ } 0 est compris entre $B(30)$ et $B(2)$ donc d'après le corollaire de la prop des val intermédiaires, il existe une unique solution sur $[2;30]$ telle que $B(x) = 0$ /1

. conclusion : sur $[1;30]$, il n'existe qu'une solution telle que $B'(x) = 0$

b) $2 \leq \alpha \leq 30$

$\left.\begin{array}{l} B'(13) \simeq 0,13 \\ B'(14) \simeq -0,72 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [13 ; 14]$

$\left.\begin{array}{l} B(13,1) \simeq 0,045 \\ B(13,2) \simeq -0,0396 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [13,1 ; 13,2]$

/1,5

$\left.\begin{array}{l} B(13,15) \simeq 2,8 \times 10^{-3} \\ B(13,16) \simeq -5 \times 10^{-3} \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [13,15 ; 13,16]$

$\left.\begin{array}{l} B(13,153) \simeq 2,997 \times 10^{-4} \simeq 0,0003 \\ B(13,154) \simeq -5,48 \times 10^{-4} \simeq -0,0005 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [13,153 ; 13,154]$

conclusion $\underline{\alpha \simeq 13,154}$ au millième près.

4. Tableau de variation.

x	1		$13,154$		30
/1 $B'(x)$		$+$	0	$-$	
/1 $B(x)$	$-14,5$	$\nearrow$	$-290 + 26,308 \ln 13,154$	$\searrow$	$-290 + 60 \ln 30$

$B(1) = -0,5 \times 1^2 + 6 \times 1 - 20 + 2 \ln 1$

/0,5 $B(1) = -0,5 - 14 = \underline{\underline{-14,5}}$

$B(13,154) = -0,5 \times (13,154)^2 + 6 \times 13,154 - 20 + 2 \times 13,154 \ln 13,154$

$B(13,154) = -27,589858 + 26,308 \ln 13,154 \simeq \underline{40,1986}$

$B(30) = -0,5 \times 30^2 + 6 \times 30 - 20 + 60 \ln 30 = -290 + 60 \ln 30 \simeq -85,928$

5. Le nombre de pièces à produire pour un bénéfice maximal est de 13,154 milliers, soit <u>13 154 pièces</u>.

/1 Le bénéfice maximal s'élève à environ <u>40 199 euros</u>.

ex3 (8 points) $D_f = [0;5]$ $f(x) = x + 1 + e$

1. a) $f'(x) = 1 - e^{-x+0,5}$?

$f(x) = x + 1 + e^{-x+0,5}$ $u(x) = -x + 0,5$ $u'(x) = -1$

1,5 $(e^u)' = u'e^u$ $(e^{-x+0,5})' = -e^{-x+0,5}$

donc $\underline{f'(x) = 1 - e^{-x+0,5}}$ CQFD!

(b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x+0,5} = 0$

$\Leftrightarrow -e^{-x+0,5} = -1$

$\Leftrightarrow e^{-x+0,5} = 1$ et $e^0 = 1$

1,5 $\Leftrightarrow e^{-x+0,5} = e^0$ $\underline{e^a = e^b \Leftrightarrow a = b}$

$\Leftrightarrow -x + 0,5 = 0$

$\Leftrightarrow -x = -0,5$

$\Leftrightarrow x = 0,5$ et $0,5 \in [0;5]$ donc $\underline{S = \{0,5\}}$

c) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x+0,5} > 0$

$\Leftrightarrow -e^{-x+0,5} > -1$

$\Leftrightarrow e^{-x+0,5} < 1$

1,5 $\Leftrightarrow e^{-x+0,5} < e^0$

$\Leftrightarrow -x + 0,5 < 0$

$\Leftrightarrow -x < -0,5$

$\Leftrightarrow x > 0,5$

Tableau de signes:

1,5

x	0		0,5		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

(d) Tableau de variation.

x	0		$0,5$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1+e^{0,5}$	$\searrow$	$2,5$	$\nearrow$	$6+e^{-4,5}$

/0,5

$f(x) = x + 1 + e^{-x+0,5}$

/0,5 $f(0) = 0 + 1 + e^{-0+0,5} = \underline{1+e^{0,5}} \simeq \underline{2,65}$

$f(0,5) = 0,5 + 1 + e^{-0,5+0,5} = 1,5 + e^{0} = \underline{2,5}$

$f(5) = 5 + 1 + e^{-5+0,5} = \underline{6+e^{-4,5}} \simeq \underline{6,01}$

2.(a) α : abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et Δ.

/0,5 D'après la lecture graphique (voir les pointillés), on lit $\underbrace{2 \leq \alpha \leq 2,5}_{\text{encadrement à 0,5 près.}}$

(b) graphiquement : $f(x) < 1,5x$

Il faut dans ce cas étudier quand la courbe $\mathcal{C}_f$ de f

/0,5 est en dessus de la droite Δ : c'est le cas quand $x \in]2,4 ; 5]$ donc $\underline{S =]2,4 ; 5]}$

<u>Partie B</u>

f : coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites.

x : <u>centaines</u> de cartes.

$f(x)$: <u>centaines</u> d'euros.

1.(a) D'après le tableau de variation de f en question 1d) de la partie A, le nombre de cartes à produire pour

/0,5 un coût minimal est égal à $0,5 \times 100 = \underline{50 \text{ cartes}}$.

(b) prix vente 1 carte : <u>1,50€</u>.

$R(x) = 1,5x$ recette en fonction de x.

/0,5 Bénéfice = recettes - coûts.

vérifier que $B(x) = 0,5x - 1 - e^{-x+0,5}$??

$B(x) = R(x) - f(x)$

1/0,5 $B(x) = 1{,}5x - (x + 1 + e^{-x+0{,}5})$

$B(x) = 1{,}5x - x - 1 - e^{-x+0{,}5}$

$B(x) = 0{,}5x - 1 - e^{-x+0{,}5}$ CQFD!

2.(a) B est strictement croissante sur $[0;5]$?

$B'(x) = 0{,}5 + e^{-x+0{,}5}$

on a : $0{,}5 > 0$

1/0,5 $e^{-x+0{,}5} > 0$ pour tout réel } donc $B'(x) > 0$ si $x \in [0;5]$

1/0,5 On déduit que B est strictement croissante sur $[0;5]$

Tableau de variation

	0		α		5
$B(x)$	$-1-e^{0,5}$	↗	0	↗	$1{,}5-e^{-4,5}$

} pas obligatoire de le mettre ici.

$B(0) = 0{,}5 \times 0 - 1 - e^{-0+0{,}5} = -1 - e^{0,5} \simeq -2{,}65$

$B(5) = 0{,}5 \times 5 - 1 - e^{-5+0{,}5} = 1{,}5 - e^{-4,5} \simeq 1{,}49$

(b) sur $[0;5]$ B est continue et strictement croissante.

1 (bonus 0,5) $\cdot B(0) \simeq -2{,}65$, $B(5) \simeq 1{,}49$ } et 0 est compris entre $-2{,}65$ et $1{,}49$, donc d'après le corollaire de la prop des val intermédiaires, il existe une unique solution α telle que $B(x) = 0$.

1/0,5 $B(2{,}32) \simeq -2{,}026$
$B(2{,}33) \simeq 4{,}59$ $\leftarrow 0$ $0 \in [-2{,}026 ; 4{,}59]$ donc

$\alpha \in [2{,}32 ; 2{,}33]$

3. Il faut que $x > \alpha$ donc pour que l'entreprise réalise

1/0,5 un bénéfice strictement positif, il faut produire 2,33 centaines, soit 233 cartes.