Sujet de rattrapage. Éléments de correction.

Ex 1 (14 points)

1. $f(x) = 0{,}2\frac{x^{19}}{3} + 3x^5 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{x^2} + \pi$ $\quad (x^n) \xrightarrow{\text{prim}} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

1/2 $F(x) = \frac{0{,}2}{3} \times \frac{x^{20}}{20} + 3 \times \frac{x^6}{6} - \frac{4}{3} \times \frac{x^4}{4} + \frac{1}{x} + \pi x$

$F(x) = \frac{0{,}01x^{20}}{3} + \frac{x^6}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{1}{x} + \pi x$

2.(a) $F(x) = 2e^{2x+\ln 2}$ $\quad (e^u)' = u'e^u$ $\quad u(x) = 2x + \ln 2$, $u'(x) = 2$

$F'(x) = 2 \times (2)e^{2x+\ln 2}$

1/1 $F'(x) = 4e^{2x+\ln 2} \neq f(x)$ donc F n'est pas une primitive de f.

(b) $F(x) = e^{x^2+x\ln 2}$ $\quad u(x) = x^2 + x\ln 2$ $\quad u'(x) = 2x + \ln 2$

$F'(x) = (2x + \ln 2)e^{x^2+x\ln 2} \neq f(x)$ donc F n'est pas une primitive de f.

(c) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+\ln 2}$

$F'(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x+\ln 2} = e^{2x+\ln 2} = f(x)$

donc F est bien une primitive de f.

(d) $F(x) = e^{2x+\ln 2}$ $\quad u(x) = 2x + \ln 2$ $\quad u'(x) = 2$

$F'(x) = 2e^{2x+\ln 2} \neq f(x)$ donc F n'est pas une primitive de f.

3. $G(t) = 2\ln(t^2+1)$ $\quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $\quad u(x) = (t^2+1)$ $u'(x) = 2t$

$(\ln t^2+1)' = \frac{2t}{t^2+1}$

$G'(t) = 2 \times \frac{2t}{t^2+1} = \frac{4t}{t^2+1} = g(x)$ donc G est bien une primitive de g.

***Exercice 2* (exercice 4 Centres étrangers 10 juin 2015).** /8 points

## Partie A.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+15}{x}$ où $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$.

La fonction $f$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables.

Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1;11]$ : $f'(x) = -x+2+\dfrac{15}{x} = \dfrac{-x^2+2x+15}{x}$ /1

Ainsi, $f'$ est la fonction définie sur $[1;11]$ par $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+15}{x}$.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1;11]$. On donnera les valeurs exactes des éléments du tableau.

Les variations de la fonction $f$ se déduisent du signe de sa dérivée sur l'intervalle $[1;11]$

Cherchons les racines du trinôme $-x^2+2x+15$ avec $a=-1$, $b=2$ et $c=15$.

Le discriminant du trinôme est :

$$\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times 15 = 64$$

$\Delta > 0$ donc le trinôme a deux racines

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_1 = \frac{-2-8}{-2} = 5$$ /0,5

$$\text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_2 = \frac{-2+8}{-2} = -3$$

Un polynôme du second degré est du signe de $a$ sauf pour les valeurs comprises entre les racines. Nous pouvons déduire le tableau du signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel $x$ ainsi que le tableau de variation de la fonction $f$ :

| $x$ | 1 | | 5 | | 11 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| Variations de $f$ | 1,5 | ↗ | $15\ln 5 - 2,5$ | ↘ | $15\ln 11 - 38,5$ |

/0,5

/0,5

CALCUL DES ÉLÉMENTS DU TABLEAU

- $f(1) = -0,5+2+15\ln 1 = \dfrac{3}{2}$
- $f(5) = -0,5\times 25+10+15\ln 5 = -\dfrac{5}{2}+15\ln 5 \simeq 21,6$
- $f(11) = -0,5\times 121+22+15\ln 11 = -\dfrac{77}{2}+15\ln 11 \simeq -2,5$

/0,5

3. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[1;11]$

- Sur l'intervalle $[1;5]$, la fonction $f$ est strictement croissante et $f(1)=\dfrac{3}{2}$ donc pour tout $x\in[1;5]$ on a $f(x) > \dfrac{3}{2}$ donc il n'existe pas de solution sur $[1;5]$ telle que $f(x)=0$ /1
- Sur l'intervalle $[5;11]$, la fonction $f$ est dérivable donc continue et strictement décroissante. En outre $f(5) = -\dfrac{5}{2}+15\ln 5 \approx 21,6$ et $f(11) = -\dfrac{77}{2}+15\ln 11 \approx -2,5$ alors, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[5;11]$

Ainsi, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[1;11]$.

b. Donner une valeur approchée de $\alpha$ à 0,01 près.

Avec la la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 10,66$.

$f(10,6) \simeq 0,43$ $f(10,7) \simeq -0,25$ donc $10,6 < \alpha \leq 10,7$ ($f(10,65) \simeq 0,07$ $f(10,66) \simeq -0,003$) donc $\alpha \simeq 10,66$ /1

c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$ dans l'intervalle $[1;11]$.

D'après les variations de la fonction $f$ : Sur l'intervalle $[1;\alpha]$ on a $f(x) > 0$ et sur l'intervalle $[\alpha;11]$, $f(x) < 0$.

/1

| | 1 | | $\alpha$ | | 11 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | − | 0 | + | |

4. a. On considère la fonction $F$ définie sur $[1;11]$ par $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 15x + 15x\ln x$. Montrer que $F$ est une primitive de la fonction $f$

Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1;11]$ :

$$F'(x) = -\frac{3}{6}x^2 + 2x - 15 + \left(15\ln x + 15x \times \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 15\ln x$$

/1

Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1;11]$, $F'(x) = f(x)$ donc la fonction $F$ définie sur $[1;11]$ par $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 15x + 15x\ln x$. Montrer que $F$ est une primitive de la fonction $f$

b. Calculer $\int_1^{11} f(x)\,\mathrm{d}x$. *On donnera le résultat exact puis sa valeur arrondie au centième.*

Comme $F$ est une primitive de la fonction $f$ alors

$$\begin{aligned}\int_1^{11} f(x)\,\mathrm{d}x &= F(11) - F(1)\\ &= \left(-\frac{1}{6}\times 1331 + 121 - 15\times 11 + 15\times 11\times \ln 11\right) - \left(-\frac{1}{6} + 1 - 15 + 15\times \ln 1\right)\\ &= 165\ln 11 - \frac{755}{3}\end{aligned}$$

pas dans le DS.

$$\int_1^{11} f(x)\,\mathrm{d}x = 165\ln 11 - \frac{755}{3} \approx 143{,}99$$

c. En déduire la valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1;11]$. (*On donnera la valeur arrondie au centième.*)

La valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1;11]$ est $\frac{1}{10} \times \int_1^{11} f(x)\,\mathrm{d}x$ soit arrondie au centième, 14,40.

**Partie B.**

1. Quelles quantités de chaises la société doit-elle produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel positif ?

D'après l'étude du signe de la fonction $f$ dans la question 3a :

pour obtenir un bénéfice mensuel positif, la société doit produire et vendre entre 100 et 1065 chaises.

/0,5

2. Déterminer le nombre de chaises que la société doit produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel maximal

Le maximum de la fonction $f$ est atteint pour $x = 5$ donc

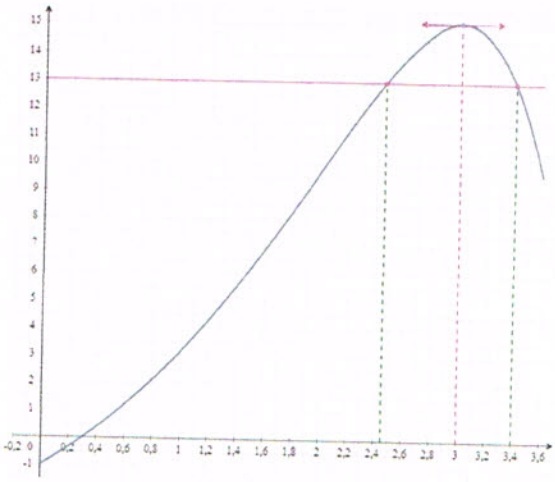
pour obtenir un bénéfice mensuel maximal, la société doit produire et vendre 500 chaises.

/0,5

***Exercice 3. EX3 Métropole 20 juin 2013.*** (18 points)

Partie A. Etude graphique.

On a représenté, en annexe 2, la fonction $B$ dans un repère du plan.
Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.
Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.



1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.

Avec la précision permise par le graphique, la courbe est au dessus de la droite d'équation $y = 13$ sur l'intervalle $[2{,}5; 3{,}4[$. /0,5 + /0,5 (pointillés)

Pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros, il faut vendre entre 2500 et 3400 poulies (*ou pour être certain, entre 2500 et 3300 poulies*)

2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ? Pour quel nombre $N$ de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?

Le maximum de la fonction $B$ est atteint pour $x = 3$ et est supérieur à 15. /0,25

Le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise est d'environ 15 000 euros, obtenue pour la vente de 3 000 poulies. /0,25

## Partie B. Etude théorique.

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut $B(x) = -5 + (4 - x)\,e^x$.

1. a. On note $B'$ la fonction dérivée de la fonction $B$. Montrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $I = [0; 3{,}6]$, on a : $B'(x) = (3 - x)\,e^x$

La fonction $B$ est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables. $B = -5 + uv$ d'où $B' = u'v + uv'$ avec pour tout réel $x$ de l'intervalle $I = [0; 3{,}6]$ : $\begin{cases} u(x) = 4 - x & ; \quad u'(x) = -1 \\ v(x) = e^x & ; \quad v'(x) = e^x \end{cases}$

D'où pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0; 3{,}6]$, /2

$$\begin{aligned} B'(x) &= -e^x + (4 - x)\,e^x \\ &= (3 - x)\,e^x \end{aligned}$$

$B'$ est la fonction définie sur l'intervalle $[0; 3{,}6]$, par $B'(x) = (3 - x)\,e^x$.

b. Déterminer le signe de la fonction dérivée $B'$ sur l'intervalle $I$

Pour tout réel $x$, $e^x > 0$ donc sur l'intervalle $[0; 3{,}6]$, $B'(x)$ est du même signe que $3 - x$. D'où le tableau du signe de $B'(x)$ : /1,5

| $x$ | 0 | | 3 | | 3,6 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $B'(x)$ | | + | 0 | − | |

c. Dresser le tableau de variation de la fonction $B$ sur l'intervalle $I$. On indiquera les valeurs de la fonction $B$ aux bornes de l'intervalle.

Les variations de la fonction $f$ se déduisent du signe de sa dérivée d'où le tableau des variations de $f$ :

| $x$ | 0 | | 3 | | 3,6 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $B'(x)$ | | + | 0 | − | |
| Variations de $B$ | $-1$ | ↗ | $e^3 - 5$ | ↘ | $0{,}4e^{3{,}6} - 5$ |

/0,5

$B(0) = -5 + (4-0)e^0 = -5 + 4 \times 1 = -1$

$B(3) = -5 + (4-3)e^3 = -5 + e^3$

$B(3{,}6) = -5 + (4-3{,}6)e^{3{,}6} = -5 + 0{,}4e^{3{,}6}$ /0,5

Attention : Ici, il faut traiter les 2 intervalles séparément

2. a. Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions $x_1$ et $x_2$, l'une dans l'intervalle $[0; 3]$ l'autre dans l'intervalle $[3; 3{,}6]$.

La fonction $B$ est dérivable donc continue. Le maximum de la fonction $B$ est $B(3) = e^3 - 5 \approx 15{,}086$ et, dautre part, $B(3{,}6) = 0{,}4\,e^{3{,}6} - 5 \approx 9{,}639$. /1

Par conséquent, sur chacun des intervalles où la fonction est monotone, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $B(x) = 13$ admet une solution unique.

Il faut traiter les 2 intervalles séparément.

L'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions $x_1 \in [0; 3]$ et $x_2 \in [3; 3{,}6]$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de chacune des deux solutions.

/1

Arrondies à 0,01 près, $x_1 \approx 2{,}46$ et $x_2 \approx 3{,}40$.

- $B(2) \simeq 9{,}78$, $B(3) \simeq 15{,}09$ donc $2 \leq \alpha_1 \leq 3$ | $B(2{,}4) \simeq 12{,}6$, $B(2{,}5) \simeq 13{,}3$ donc $2{,}4 \leq \alpha_1 \leq 2{,}5$

$B(2{,}45) \simeq 12{,}96$, $B(2{,}46) \simeq 13{,}03$ donc $2{,}45 \leq \alpha_1 \leq 2{,}46$

$\alpha_1 \simeq 2{,}46$

- $B(3{,}3) \simeq 13{,}98$, $B(3{,}4) \simeq 12{,}98$ donc $3{,}3 \leq \alpha_2 \leq 3{,}4$

$B(3{,}39) \simeq 13{,}096$, $B(3{,}4) \simeq 12{,}978$ donc $3{,}39 \leq \alpha_2 \leq 3{,}4$

$\alpha_2 \simeq 3{,}4$