Eléments de correction sujet 5 page 116 Annales Liban juin 2010

Partie A.

$f(x) = (3e^2 - x)lnx + 10$

1. Calculer la valeur exacte de $f(e^2)$

$f(e^2) = (3e^2 - e^2)lne^2 + 10$

$f(e^2) = (2e^2) \times 2 + 10$

$f(e^2) = 4e^2 + 10$ c'est la valeur exacte.

La suite de la correction est extraite du site de l'APMEP

2. La fonction f est de la forme $uv + 10$ avec

$$u(x) = 3e^2 - x \qquad \text{et} \qquad u'(x) = -1$$
$$v(x) = \ln x \qquad\qquad v'(x) = \frac{1}{x}$$

Donc pour pour tout réel x on a :

$$f'(x) = (-1) \times \ln x + \left(3e^2 - x\right) \times \frac{1}{x}$$
$$= -\ln x + \frac{3e^2}{x} - 1$$

3. a. Comme la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $]0\,;\,20]$ et s'annule en e^2, elle est strictement positive sur $]0\,;\,e^2[$ et strictement négative sur $]e^2\,;\,20]$.

b. On en déduit le tableau suivant :

x	0		e^2		20
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(e^2)$	↘	$f(20)$

4. a. Sur l'intervalle $[0{,}6;\ 0{,}7]$, la fonction f est continue et strictement croissante, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle prend une seule fois toutes les valeurs de l'intervalle $[f(0{,}6)\ ;\ f(0{,}7)]$ or $f(0{,}6) \approx -1{,}02$ et $f(0{,}7) \approx 2{,}34$, ils sont de signes différents donc l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α.
En utilisant le tableau de la calculatrice on trouve que $f(x)$ change de signe entre 0,628 et 0,629 donc

$$\boxed{\alpha \approx 0{,}629 \text{ à } 0{,}001 \text{ près par excès.}}$$

b. Comme la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,e^2[$ et s'annule en α, elle est strictement négative sur $]0\,;\,\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha\,;\,e^2]$.
De plus, $f(20) \approx 16{,}49$ donc $f(x)$ reste positif sur $[e^2\,;\,20]$.

Partie B

1. D'après la partie A, pour que $f(x)$ soit positif il faut que $x > \alpha$.

Il faut donc produire au moins 629 DVD pour que le bénéfice soit positif.

2. D'après la partie A, f admet un maximum lorsque $x = e^2 \approx 7{,}389$ et ce maximum vaut $f\left(e^2\right) \approx 39{,}56$.

L'entreprise doit produire 7389 DVD pour réaliser un bénéfice maximal de 39 560 €