Exercice 98 page 143 + éléments de correction.

98 Fonction logistique

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{10}{1 + 4e^{-0,5x}}.$$

1. Calculez $f(0)$, $f(10)$, $f(100)$.

2. Montrez que pour tout réel x, $0 < f(x) < 10$.

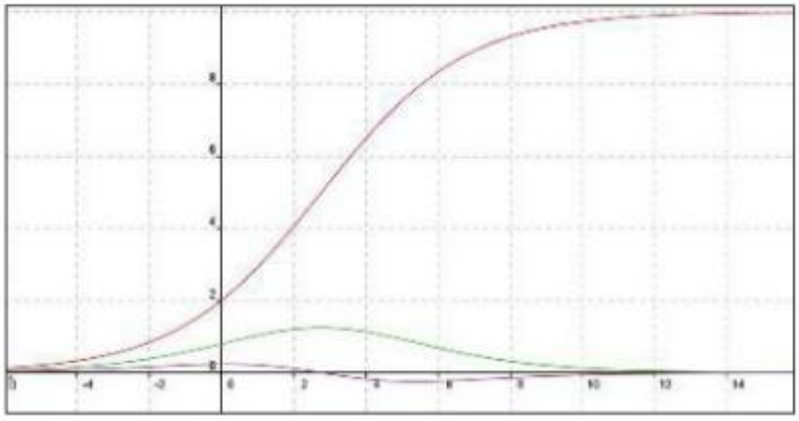
3. Calculez $f'(x)$ et prouvez que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. On a construit ci-dessous à l'aide du logiciel GeoGebra les courbes représentatives des fonctions f, f', f''.

a) Indiquez laquelle des courbes est celle de f, laquelle est celle de f' et laquelle est celle de f''.

b) À l'aide des graphiques, justifiez que la courbe représentative de f possède un point d'inflexion et donnez une valeur approchée des coordonnées $(\alpha ; \beta)$ de ce point.

c) Indiquez sur quel intervalle f est convexe et sur quel intervalle f est concave.



1. $f(0) = \frac{10}{1+4e^0} = \frac{10}{5} = 2$ $\quad f(10) = \frac{10}{1+4e^{-5}} \simeq 9,7375555$

$\simeq \underline{9,74}$

$f(100) = \frac{10}{1+4e^{-50}} = 10$

2. Pour $\forall$ réel x, $0 < f(x) < 10$??

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad e^{x} > 0$

$e^{-0,5x} > 0$

$\frac{10}{1+4e^{-0,5x}} > 0$ donc $\underline{f(x) > 0}$ $\forall x \in$

$1+4e^{-0,5x} > 1$

$\frac{10}{1+4e^{-0,5x}} < 10$ donc $\underline{f(x) < 0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

on a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\underline{0 < f(x) < 10}$

3. $f'(x)$?

$f(x) = 10 \times \frac{1}{1+4e^{-0,5x}}$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$u(x) = 1+4e^{-0,5x}$

$u'(x) = 4 \times -0,5 \times e^{-0,5x}$

$u'(x) = -2e^{-0,5x}$

$f'(x) = 10 \times \frac{2e^{-0,5x}}{(1+4e^{-0,5x})^2}$

$f'(x) = \frac{20e^{-0,5x}}{(1+4e^{-0,5x})^2}$

ou $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$u(x) = 10$ $u'(x) = 0$

$v(x) = 1+4e^{-0,5x}$ $v'(x) = 4 \times -0,5 e^{-0,5x}$

$f'(x) = \frac{0 \times (1+4e^{-0,5x}) + 2e^{-0,5x} \times 10}{(1+4e^{-0,5x})^2}$

$f'(x) = \frac{20e^{-0,5x}}{(1+4e^{-0,5x})^2}$

$e^{-0,5x} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} 20e^{-0,5x} > 0 \\ (1+4e^{-0,5x})^2 > 0 \end{array}\right\}$ donc $f'(x) > 0$

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. a) la courbe rouge correspond à f (seule courbe correspondant à une fct croissante).

- On a $f'(x) > 0$ donc la courbe verte correspond à la représentation graphique de $f'(x)$

- la courbe de f'' est donc celle qui reste, à savoir la violette.

b) courbe $\mathcal{C}_f$: pt d'inflexion entre 2 et 4 ?

courbe violette $\mathcal{C}_{f''}$: $f''(x) = 0$ pour $\underline{\underline{x \simeq 3}}$

graphiquement $f(3) \simeq 6$

. point inflexion $A(3 ; 6)$

c) f est donc convexe sur $]-\infty ; 3[$ et concave sur $]3 ; +\infty[$

→ (D'après signe de f'' en violet aussi).

→ d'après ↗ de $f'(x)$ puis ↘ de $f'(x)$.