1. Sur $]0;3]$, $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse :

Pour tout réel x strictement positif,

$$\begin{aligned} x^2(1-\ln x)=0 &\Leftrightarrow 1-\ln x=0 \\ &\Leftrightarrow \ln x=1 \\ &\Leftrightarrow x=\mathrm{e} \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\mathrm{e}$. La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse e.

☑ a. e b. $2{,}72$ c. $\frac{1}{2}\mathrm{e}+1$

2. $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse :

La convexité de la fonction se déduit du signe de sa dérivée seconde. Étudions le signe de $f''(x)=-1-2\ln x$.

Pour tout réel x strictement positif,

$$\begin{aligned} -1-2\ln x \leqslant 0 &\Leftrightarrow -2\ln x \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \ln x \geqslant -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^{-0{,}5} \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \end{aligned}$$

Nous pouvons établir le tableau du signe de $f''(x)$ sur $]0;3]$:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$		3
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	

La dérivée seconde s'annule en chageant de signe pour $x=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ donc la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

a. e ☑ b. $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ c. $\sqrt{\mathrm{e}}$

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;3]$ on a :

La fonction f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables :

$f=uv$ d'où $f'=u'v+uv'$ avec pour tout réel x de l'intervalle $]0;3]$, $\begin{cases} u(x)=x^2 & ; \quad u'(x)=2x \\ v(x)=1-\ln x & ; \quad v'(x)=-\frac{1}{x} \end{cases}$

Soit pour tout réel x de l'intervalle $]0;3]$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\times(1-\ln x)-x^2\times\frac{1}{x} \\ &= 2x-2x\ln(x)-x \\ &= x-2x\ln(x) \end{aligned}$$

☑ a. $f'(x)=x(1-2\ln x)$ b. $f'(x)=-\frac{2}{x}$ c. $f'(x)=-2$

4. Sur l'intervalle $[1;3]$:

Pour tout x de l'intervalle $\left[\frac{1}{\sqrt{e}};3\right]$ on a $f''(x) \leqslant 0$ donc sur l'intervalle $[1;3]$, f' est décroissante.

a. f est convexe

b. f est décroissante

☑ c. f' est décroissante

5. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e s'écrit :

Une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e est :

$$y = f'(e) \times (x - e) + f(e)$$

Or $f(e) = 0$ et $f'(e) = -e$ d'où une équation de la tangente T :

$$y = -e \times (x - e) \quad \Leftrightarrow \quad y = -ex + e^2$$

a. $y = -x + e$

b. $y = -ex$

☑ c. $y = -ex + e^2$